Développement : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agrégation de mathématique

Énoncé :

Théorème 1 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est égale à la boule unité $B(0,1)$, définie par $B(0,1) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : |||A|||_2 \leq 1\}$

On rappelle avant quelque notion :

Théorème (Décomposition polaire) 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe deux matrices $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

Théorème (Hahn-Banach) 3 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, F un convexe fermé de E et C un convexe compact de E tel que $F \cap C = \emptyset$. Alors il existe une forme linéaire continue $\varphi \in L(E, \mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{x\in C} \varphi(x) < \inf_{y \in F} \varphi(y).$$

Théorème (Carathéodory) 4 : Soient E un espace vectoriel de dimension n et X une partie non vide de E. Alors $Conv(X)$ est l'ensemble de barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de $n+1$ points de X.

Proposition 5 : Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact. Alors $Conv(A)$ est compact.

Démonstration : On pose $C = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$ qui est compact car fermé et borné. On définit de plus

$$\begin{array}{llcl} f : & A^{n+1} \times C & \to & Conv(A) \\ & (a_1, ..., a_{n+1}, \lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \end{array}$$

Cette application est surjective par le théorème précédent. De plus, f est continue donc $Conv(A)$ est compact comme image par un compact d'une fonction continue. $\square$

Corollaire 6 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Démonstration : On sait que $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$ (voir décomposition polaire). Donc grâce à la proposition précédente, on en déduit que l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est compact. $\square$

Résolution :

Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $|||M|||_2 = 1$ (voir décomposition polaire) car M conserve la norme euclidienne. Ainsi, on a $O_n(\mathbb{R}) \subseteq B(0,1)$, et comme $B(0,1)$ est convexe, on a l'inclusion $Conv(O_n(\mathbb{R})) \subseteq$

$B(0,1)$.

> Car l'enveloppe convexe est le plus petit convexe contenant l'ensemble, donc comme la boule unité est convexe, on a l'inclusion

Montrons l'inclusion réciproque par l'absurde : supposons qu'il existe une matrice $M \in B(0,1)$ telle que $M \notin Conv(O_n(\mathbb{R}))$. Comme $\{M\}$ est un convexe fermé et l'ensemble $Conv(O_n(\mathbb{R}))$ est un convexe compact, le Théorème d'Hahn-Banach nous donne l'existence d'une formé linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\underset{O \in E}{\varphi(O)} < \varphi(M).$$

On va montrer que toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne respecte pas l'égalité ci-dessus. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est euclidien pour le produit scalaire $\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB)$ (qui n'est autre que le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$). Par théorème de Riesz, il existe donc $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(B) = Tr({}^tCB)$ pour toute matrice B. On note $A = {}^tC$ de sorte $\varphi(B) = Tr(AB) = Tr(BA)$ pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) \leq \varphi(U)$. Par le théorème de décomposition polaire, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Or, d'après le théorème spectral, S est diagonalisable : il existe $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de S associés aux valeurs propres positives $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Alors, comme $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée, et comme la trace ne dépend pas de la base, on a

$$\varphi(M) = Tr(MA) = \sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle MOSe_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle MOe_i, e_i\rangle$$

D'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\varphi(M)| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|MOe_i\|_2 \|e_i\|_2$. Or, comme $|||M|||_2 \leq 1$,$|||O|||_2 = 1$ et $\|e_i\|_2 = 1$, on a $|\varphi(M)| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. On considère maintenant $U = {}^tO \in O_n(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$\varphi({}^tO) = Tr({}^tOA) = Tr({}^tOOS) = Tr(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

On a donc $\varphi(M) \leq \varphi({}^tO)$, ce qui est absurde, d'ou le théorème.

Théorème 7 : Les points extrémaux de $Conv(O_n(\mathbb{R}))$ sont les matrices orthogonales

Démonstration : D'après Carathéodory, les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ sont les seuls candidats pour être des points extrémaux de B. en effet, toute matrice $A \in Conv(O_n(\mathbb{R}))$ s'écrit comme barycentre de $n+1$ matrices orthogonales : $A = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i$ avec $A_i \in O_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, pour que A soit un point extrémal, on doit avoir $A_i = A$ pour tout i tel que $\lambda_i \neq 0$, donc $A \in O_n(\mathbb{R})$.
Vérifions qu'en effet toute matrice $O \in O_n(\mathbb{R})$ est bien un point extrémal de $Conv(O_n(\mathbb{R}))$. Supposons par l'absurde que O appartienne strictement à un segment de $Conv(O_n(\mathbb{R}))$: on écrit alors $O = tU + (1-t)V$ avec $U, V \in Conv(O_n(\mathbb{R}))$ qui vérifient $U \neq V$, et $t \in]0,1[$. Pour tout vecteur x de norme 1, on a alors

$$1 = \|Ox\|_2 \leq \|tUx\|_2 + \|(1-t)Vx\|_2 \leq t|||U|||_2 + (1-t)|||V|||_2 \leq 1$$

Toutes les inégalités précédentes sont donc des égalités, d'où en particulier $|||U|||_2 = |||V|||_2 = 1$ et $\|Ux\|_2 = \|Vx\|_2 = 1$. Par caractérisation du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire de $\|.\|_2$, il existe $\lambda \geq 0$ tel que $Ux = \lambda Vx$. Comme $\|Ux\|_2 = \|Vx\|_2 = 1$, on a $\lambda = 1$ et donc $Ux = Vx$ pour tout vecteur x tel que $\|x\|_2 = 1$. On obtient donc $U = V$, ce qui est absurde, prouvant que O est bien un point extrémal.